ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2014
Môn : TOÁN - Khối : A và A1

Câu 1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1)

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng y = -x bằng $\sqrt{2}$

Câu 2 (1,0 điểm) Giải phương trình $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$

Câu 3 (1,0 điểm) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 - x + 3$ và đường thẳng $y = 2x + 1$

Câu 4 (1,0 điểm)

a) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z + (2+i)\bar{z} = 3 + 5i$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

b) Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn?

Câu 5 (1,0 điểm) Trong không gian hệ tọa độ Oxyz , cho mặt phẳng (P) : $2x + y - 2z - 1 = 0$ và đường thẳng d: $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{3}$. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P). Viết phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P).

Câu 6 (1,0 điểm): Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh a, SD = $\frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng *(ABCD)* là trung điểm của cạnh AB. Tính theo a thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách từ A đến mặt phẳng *(SBD).*

Câu 7 (1,0 điểm): Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho AN = 3NC. Viết phương trình đường thẳng CD, biết rằng M(1;2) và N (2;-1).

Câu 8 (1,0 điểm): Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} \end{cases}$ (x,y $\in$ R)

Câu 9 (1,0 điểm) : Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{1+yz}{9}$$

BÀI GIẢI

Câu 1:

Tập xác định: $D = R \setminus \{1\}$

$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$

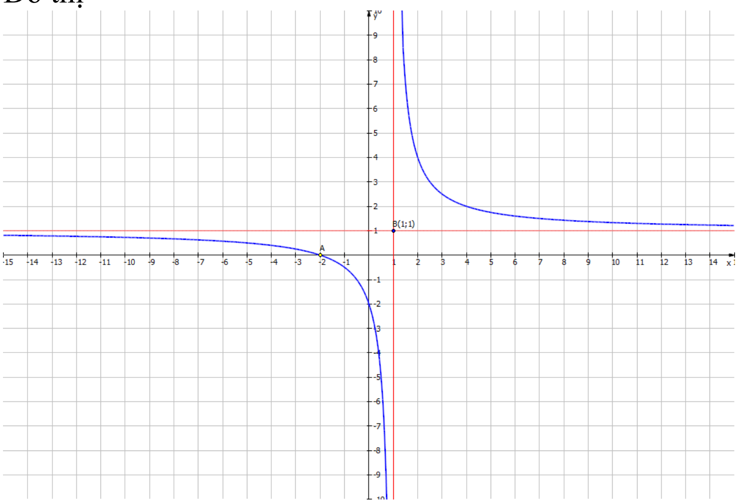
$\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$, nên x = 1 là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1$ nên tiệm cận ngang là y = 1

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'	0	-	‖	-	0
y	1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Đồ thị



b) Gọi M (x; $\frac{x+2}{x-1}$) . Yêu cầu bt tương đương : $\left|\frac{\frac{x+2}{x-1}+x}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow$ $|x + 2 + x^2 – x| = 2|x – 1|$ $\Leftrightarrow$ $|x^2 + 2| = 2|x – 1|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 (VN) \end{cases}$ hay $\begin{cases} x < 1 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ x = -2 hay x = 0.

Vậy có 2 điểm M là (-2; 0) và (0; -2).

Câu 2 : sinx + 4cosx = 2 + 2sinxcosx

$\Leftrightarrow$ 2sinxcosx – sinx + 2 – 4cosx = 0

$\Leftrightarrow$ 2cosx(sinx – 2) – (sinx – 2) = 0

$\Leftrightarrow$ 2cosx – 1 = 0 (vì sinx – 2 $\neq$ 0)

$\Leftrightarrow$ cosx = $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ x = $\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$

Câu 3 : Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và đường thẳng là

$x^2 – x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = 2$

Ta có khi $1 \leq x \leq 2$ thì $x^2 – x + 3 \leq 2x + 1$

$$S=\int_1^2\left(-x^2+3x-2\right)dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right)\Big|_1^2=\left(-\frac{1}{3}2^3+\frac{3}{2}2^2-2.2\right)-\left(-\frac{1}{3}1^3+\frac{3}{2}1^2-1.2\right)$$

$$=-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

Câu 4 :

a) $z+(2+i)\bar{z}=3+5i$

Gọi z = a + ib, ta có phương trình đã cho thành: z

a + ib + (2 + i)(a – ib) = 3 + 5i

$\Leftrightarrow$ 3a – ib + b + ia = 3 + 5i $\Leftrightarrow$ 3a + b = 3 và a – b = 5 $\Leftrightarrow$ a = 2 và b = -3.

b) Gọi A: "Chọn được 4 thẻ chẵn"

Chọn 4 thẻ trong 16 thẻ có $C_{16}^4=1820$ cách chọn

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)=1820$

Chọn 4 thẻ trong 8 thẻ đánh số chẵn có $C_8^4=70$ cách chọn

Số phần tử biến cố A : $n(A)=70$

Xác suất để chọn được 4 thẻ đều chẵn

$P(A) = \frac{70}{1820} = \frac{1}{26}$

Câu 5 :

a) $I \in d \Rightarrow I\,(2 + t; -2t; -3 + 3t)$

$I \in (P) \Rightarrow 2(2 + t) - 2t - 2(3t - 3) - 1 = 0$

$\Rightarrow t = \frac{3}{2}$. Vậy I $\left(\frac{7}{2}; -3; \frac{3}{2}\right)$

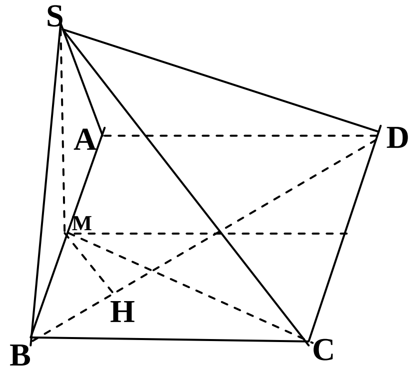
b) (d) qua A (2; 0; -3) và VTCP $\vec{a} = (1; -2; 3)$

(α) có PVT là $\vec{n}$ (2; 1; -2)

Gọi (α) là mp qua d và vuông góc (P) thì (α) có VTPT là $\vec{a} \wedge \vec{n} = (1; 8; 5)$

PT (α) là : $1(x - 2) + 8(y - 0) + 5(z + 3) = 0 \Leftrightarrow x + 8y + 5z + 13 = 0$

Câu 6 : Gọi M là trung điểm của AB.



$$CM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow$$

$$SM^2 = SC^2 - MC^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \frac{5a^2}{4} = a^2$$

$V = \frac{1}{3}a^2 a = \frac{a^3}{3}$. Ta có $MH = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

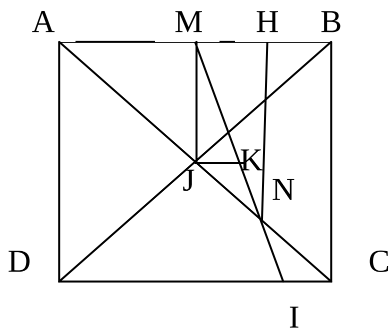
Gọi h là chiều cao từ M của tam giác SMH

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a}{3}$$

Vì AB = 2AM $\Rightarrow$d (A;SBD) = 2d(M; SBD) = $\frac{2a}{3}$

Câu 7 : Gọi I giao điểm MN và CD

$\Delta NAM \sim \Delta NCI \Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{NM}{NI} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{NI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MN}$



$$\Rightarrow \begin{cases} x_I - 2 = \frac{1}{3}(1) \\ y_I + 1 = \frac{1}{3}(-3) \end{cases}. \text{ Vậy I } \left(\frac{7}{3}; -2\right)$$

Gọi $\vec{n} = (a; b)$ là VTPT của AB

pt (AB) : $a(x - 1) + b(y - 2) = 0$

pt (CD) : $a(x - \frac{7}{3}) + b(y + 2) = 0$

Đặt AB = x (x > 0) $\Rightarrow$MH = $\frac{x}{4}$; NH = $\frac{3}{4}x$

Ta có : $MN^2 = MH^2 + NH^2 \Rightarrow x = 4$

d(M; CD) = 4 $\Leftrightarrow |-a + 3b| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 4a^2 + 3ab = 0$

Với $b = 0 \Rightarrow a = 0$ (loại)

Với $b \neq 0$ chọn $b = 1 \Rightarrow a = 0$ hoặc $a = -\frac{3}{4}$

Vậy phương trình CD là : $y + 2 = 0$ hoặc $3x - 4y - 15 = 0$

<u>Cách 2</u>: Gọi I giao điểm MN và CD

$\Delta NAM \sim \Delta NCI \Rightarrow \dfrac{NA}{NC} = \dfrac{NM}{NI} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{NI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MN}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_I - 2 = \dfrac{1}{3}(1) \\ y_I + 1 = \dfrac{1}{3}(-3) \end{cases}$. Vậy $I\left(\dfrac{7}{3};-2\right)$

VTCP của MN là $\vec{a}$ (1; -3)

VTCP của CD là $\vec{b}$ (m; n)

cos(MN,CD) = $\dfrac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 8n^2 - 6mn = 0 \Leftrightarrow n = 0$ hay $n = \dfrac{3m}{4}$

+ TH1: n = 0 $\Rightarrow$ CD : y + 2 = 0

+ TH2: $n = \dfrac{3m}{4} \Rightarrow$ CD : 3x – 4y – 15 = 0

Câu 8:

$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 & (1) \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} & (2) \end{cases}$ $(x, y \in R)$

Điều kiện : $\begin{cases} 2 \le y \le 12 \\ 12 - x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le y \le 12 \\ -2\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{3} \end{cases}$

Cách 1:

Đặt $a = \sqrt{12-y}$, $a \ge 0 \Rightarrow y = 12 - a^2$

(1) $\Leftrightarrow xa + \sqrt{(12-a^2)(12-x^2)} = 12$

$\Leftrightarrow \sqrt{12^2 - 12x^2 - 12a^2 + x^2a^2} = 12 - xa$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xa \le 12 \\ 12^2 - 12x^2 - 12a^2 + x^2a^2 = 12^2 - 2.12.xa + x^2a^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xa \le 12 \\ 12x^2 - 2.12xa + 12a^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xa \le 12 \\ (x-a)^2 = 0 \end{cases}$

Ta có $(x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{12-y}$ (*)

Thế (*) vào (2) được : $(12-y)\sqrt{12-y} - 8\sqrt{12-y} - 1 = 2\sqrt{y-2}$

$\Leftrightarrow (4-y)\sqrt{12-y} = 2\sqrt{y-2} + 1$

$\Leftrightarrow \quad (3-y)\sqrt{12-y} + \sqrt{12-y} - 3 + 2 - 2\sqrt{y-2} = 0$

$\Leftrightarrow (3-y)\sqrt{12-y} + \dfrac{3-y}{\sqrt{12-y}+3} + \dfrac{2(3-y)}{1+\sqrt{y-2}} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ \sqrt{12-y} + \dfrac{1}{\sqrt{12-y}+3} + \dfrac{2}{1+\sqrt{y-2}} = 0 \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$

Vậy $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

Cách 2:

Ta có $x\sqrt{12-y}+\sqrt{(12-x^2)y} \le \sqrt{\left(x^2+12-x^2\right)\left(12-y+y\right)}=12$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{12-y^2}}=\dfrac{\sqrt{12-y}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x\sqrt{y}=\sqrt{(12-y)(12-x^2)}$ (3)

Khi đó (1) tương đương với (3)

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2y = 144-12x^2-12y+x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 12y = 144-12x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y = 12-x^2 \end{cases}$ (4)

Thế (4) vào (2) ta có

$(2) \Leftrightarrow x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x^3-8x-1-2\sqrt{10-x^2}=0$

$\Leftrightarrow x^3-8x-3+2\left(1-\sqrt{10-x^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2+3x+1\right)+2.\dfrac{1-(10-x^2)}{1+\sqrt{10-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2+3x+1\right)+2.\dfrac{9-x^2}{1+\sqrt{10-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left[x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}=0 \text{ (vô nghiệm vì } x \ge 0) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=3$

Vậy $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

Cách 3:

Đặt $\vec{a}=\left(x;\sqrt{12-x^2}\right);\vec{b}=\left(\sqrt{12-y};\sqrt{y}\right)$

$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\sqrt{12}$

(1) $\Leftrightarrow \vec{a}^2+\vec{b}^2=2\vec{a}.\vec{b}$

$\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow x=\sqrt{12-y}$

(2) $\Leftrightarrow x^3-8x-3=2\sqrt{10-x^2}-2$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2+3x+1\right)=2\dfrac{\left(3-x\right)\left(3+x\right)}{\sqrt{10-x^2}+1}$

$\Leftrightarrow x=y=3$

$\left(x^2+3x+1\right)\left(\sqrt{10-x^2}+1\right)-2\left(3+x\right)=0$

Đặt $f\left(x\right)=\left(x^2+3x+1\right)\left(\sqrt{10-x^2}+1\right)-2\left(3+x\right)$

$f'\left(x\right)<0\,\forall x>0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hpt trên: (3;3)

Câu 9:

Ta có : $2x(y+z) \le x^2+(y+z)^2 = 2+2yz \Rightarrow yz+1 \ge x(y+z)$

$$\frac{x^2}{x^2+yz+x+1} \le \frac{x^2}{x^2+x+x(y+z)} = \frac{x^2}{x+y+z+1}$$

Do đó $P \le \dfrac{x}{x+y+z+1} + \dfrac{y+z}{x+y+z+1} - \dfrac{1+yz}{9} = 1 - \left(\dfrac{1}{x+y+z+1} + \dfrac{1+yz}{9}\right)$

Theo BĐT BCS ta có : $x + (y+z) \le \sqrt{2(x^2+(y+z)^2} = 2\sqrt{1+yz}$

Do đó : $T = \dfrac{1}{1+2\sqrt{1+yz}} + \dfrac{1+yz}{9} = \dfrac{1}{2u+1} + \dfrac{u^2}{9} \ge \dfrac{4}{9}, \forall u = \sqrt{1+yz} \ge 1$

$\Rightarrow P \le 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$

Khi x = y = 1 và z = 0 hay x = z = 1 và y = 0 thì $P = \dfrac{5}{9}$

Vậy Max $P = \dfrac{5}{9}$.

Nguyễn Thành Long, Võ Minh Vinh, Trần Quang Hiển
(Trung tâm LTĐH Vĩnh Viễn – TP.HCM)